

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1 Phương trình lượng giác cơ bản

1.1 Phương trình $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}$

Bài tập Giải các phương trình sau

1. $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$, 2. $\sin 2x = \sin 45^\circ$.

3. $\sin \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$, 4. $\sin(x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.2 Phương trình $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}$

Bài tập Giải các phương trình sau

1. $\cos x = -1$; 2. $\cos(x - 5) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-\pi < x < \pi$.

3. $2\cos 2x + 1 = 0$, 4. $\cos x + \cos 2x = 0$.

1.3 Phương trình $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$

Bài tập Giải các phương trình sau

1. $\tan(2x - 1) = \sqrt{3}$, 2. $\tan(x - 15^\circ) = 5$.

3. $\tan 3x = \cot \frac{2\pi}{5}$, 4. $\tan x \tan 3x = 0$.

1.4 Phương trình $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$

Bài tập Giải các phương trình sau

1. $\cot x + 1 = 0$; 2. $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ với $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

3. $\cot\left(\frac{x}{4} + 20^\circ\right) = -\sqrt{3}$; 4. $\cot x + \cot 2x = 0$.

2 Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

2.1 Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.

2.2 Phương pháp giải phương trình $a\sin x + b\cos x = c$

1. Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } a\sin x + b\cos x = c &\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &\Leftrightarrow \cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x = \sin\beta \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \sin\beta. \end{aligned}$$

2. Đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$\text{Ta có } a\sin x + b\cos x = c \Leftrightarrow a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} = c.$$

Bài tập Giải các phương trình sau

1. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1;$ 2. $2\sin x + \sqrt{5}\cos x = -3.$

3. $3\sin 2x + 4\cos 2x = -5;$ 4. $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13.$

3 Phương trình thuần nhất bậc hai đvsin cos

3.1 Phương trình $a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = 0$

3.2 Phương pháp giải $a\sin^2 x + b\sin x \cos x + c\cos^2 x = 0$

1. Đặt $\cos^2 x$

$$\text{Ta có } \cos^2 x(a\tan^2 x + b\tan x + c) = 0.$$

2. Đưa về phương trình bậc nhất đối với $\sin 2x$ và $\cos 2x$. Ta dùng công thức hạ bậc $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x, 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x, 2\sin x \cos x = \sin 2x$.

Bài tập Giải các phương trình sau

1. $4\sin^2 x - 5\sin x \cos x - 6\cos^2 x = 0;$ 2. $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 1.$

3. $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos x = 4;$ 4. $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}.$

4 Phương trình dạng biến đổi (tổng - tích)

Ta có các công thức biến đổi:

1. Công thức biến đổi tích - tổng.

$$\begin{aligned} \star \cos x + \cos y &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \star \cos x - \cos y &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \star \sin x + \sin y &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \star \sin x - \sin y &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{aligned}$$

|

$$\begin{aligned} \star 2\cos A \cos B &= \cos(A+B) + \cos(A-B) \\ \star -2\sin A \sin B &= \cos(A+B) - \cos(A-B) \\ \star 2\sin A \cos B &= \sin(A+B) + \sin(A-B) \\ \star 2\cos A \sin B &= \sin(A+B) - \sin(A-B) \end{aligned}$$

2. Công thức hạ bậc công thức nhân đôi

$$\begin{aligned} \star \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \star \cos(x+x) &= \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\ \star \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ \star \sin(x+x) &= \sin 2x = 2\sin x \cos x \\ \star \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \\ \star \tan(x+x) &= \tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}$$

|

$$\star 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x, \quad 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x, \quad 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

Bài tập Giải các phương trình sau

$$1. \sqrt{3}\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + 1 = 0; \quad 2. \cos^2 x + \sin x + 1 = 0.$$

$$3. \sin 5x \sin 2x = \sin 4x \sin 3x; \quad 4. \sin^2 x + \sin^2 3x = \sin^2 2x.$$

$$5. \sin 2x + \sin 4x = \sin 6x; \quad 6. \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$$

5 Bài tập luyện: Giải các phương trình

1. $\sin x = \sqrt{2}\sin 5x - \cos x$; 2. $\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$.
3. $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$ {hạ bậc, tổng - tích}.
4. $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$ {nhân đôi, nhóm $(\sin x + \cos x)(?)$ }.
5. $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$ {x về +, về $\sin 2x$ }.
6. $\frac{2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x}$ {hạ bậc, về $\sin 2x$ }.
7. $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$ {c-c, nhân đôi, nhóm}.
8. $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$ {nhóm $(s+c)(?)=0$ }.
9. $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$ {s-s, hạ bậc, nhóm $\cos 4x$ }.
10. $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cos x$ {nhóm, hạ bậc}.
11. $(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$ {nhóm về $\cos 2x$ }.
12. $2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$ {nhân đôi, nhóm $(1+2c)$ }.
13. $\frac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$ {đưa về ptb1đvsc=ptb1đvsc2x}.
14. $\frac{(1 + \sin x + \cos 2x)\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ {đưa về nhóm $(s+c)$ }.
15. $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2}\sin x \sin 2x$ Biến đổi nhóm $\sin^2 x$, nhóm $\cos x$ }.