

BÀI 3. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

1. Dấu nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ nghiệm nhị thức là $-\frac{b}{a}$.

Bảng xét dấu

Nếu $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

Nếu $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

2. Khử giá trị tuyệt đối: $|ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{với } ax + b \geq 0 \\ -(ax + b) & \text{với } ax + b < 0 \end{cases}$.

Bảng khử giá trị tuyệt đối

Nếu $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ ax + b $	$-ax - b$	0	$ax + b$

Nếu $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ ax + b $	$ax + b$	0	$-ax - b$

3. Ví dụ để hiểu rõ lí thuyết.

Ví dụ 1. Xét dấu nhị thức bậc nhất $f(x) = 2x + 3$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$, hệ số $a = 2 > 0$.

+ Bảng xét dấu

$a = 2 > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x + 3$	-	0	+

Kết luận:

$$2x + 3 < 0 \text{ khi } x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right).$$

$$2x + 3 > 0 \text{ khi } x \in \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

Ví dụ 2. Xét dấu nhị thức bậc nhất $f(x) = -3x + 5$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$, hệ số $a = -3 < 0$.

+ Bảng xét dấu

$a = -3 < 0$

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$-3x + 5$	+	0	-

Kết luận:

$$-3x + 5 > 0 \text{ khi } x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right).$$

$$-3x + 5 < 0 \text{ khi } x \in \left(\frac{5}{3}; +\infty\right).$$

Ví dụ 3. Khử dấu giá trị tuyệt đối $|2x + 4|$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$, hệ số $a = 2 > 0$.

+ Bảng khử dấu giá trị tuyệt đối

$a = 2 > 0$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$ 2x + 4 $	$-2x - 4$	0	$2x + 4$

Kết luận:

$$= -2x - 4 \text{ khi } x \in (-\infty; -2).$$

$$= 2x + 4 \text{ khi } x \in (-2; +\infty).$$

Ví dụ 4. Khử dấu giá trị tuyệt đối $|-3x + 6|$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $-3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, hệ số $a = -3 < 0$.

+ Bảng khử dấu giá trị tuyệt đối

$a = -3 < 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$ -3x + 6 $	$-3x + 6$	0	$3x - 6$

Kết luận:

$$= -3x + 6 \text{ khi } x \in (-\infty; 2).$$

$$= 3x - 6 \text{ khi } x \in (2; +\infty).$$

4. Bài tập vận dụng

Xét dấu tích, thương của các nhị thức

Bài 4-1. Xét dấu biểu thức $f(x) = (x - 2)(-2x + 3)$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, hệ số $a = 1 > 0$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $-2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$, hệ số $a = -2 < 0$.

+ Bảng xét dấu. HD: {Xét tích hai nhị thức trên cùng bảng xét dấu}

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$x - 2$		-		-	0	+
$-2x + 3$		+	0	-		-
$f(x)$		-	0	+	0	-

HD: {Quy tắc nhân dấu cho $f(x)$ là - nhân + = -, - nhân - = +, + nhân - = -}

{Đối với nhị thức $x - 2$ thì khoảng $(-\infty; 2)$ được chia thành hai khoảng âm}

{Đối với nhị thức $-2x + 3$ thì khoảng $(\frac{3}{2}; +\infty)$ được chia thành hai khoảng âm}

+Dựa vào bảng xét dấu $f(x)$ ta kết luận

$f(x) > 0$ {là +} khi $x \in (\frac{3}{2}; 2)$, $f(x) < 0$ {là -} khi $x \in (-\infty; \frac{3}{2})$ hoặc $x \in (2; +\infty)$.

Bài 4-2. Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{2x + 1}{2 - x}$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, hệ số $a = 2 > 0$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $-2 - x = 0 \Leftrightarrow x = -2$, hệ số $a = -1 < 0$.

+ Bảng xét dấu. {Xét thương hai nhị thức trên cùng bảng xét dấu}

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x + 1$		-	0	+		+
$2 - x$		+		+	0	-
$f(x)$		-	0	+		-

+Dựa vào bảng xét dấu $f(x)$ ta kết luận

$f(x) > 0$ {là +} khi $x \in (-\frac{1}{2}; 2)$, $f(x) < 0$ {là -} khi $x \in (-\infty; -\frac{1}{2})$ hoặc $x \in (2; +\infty)$.

Bài 4-3. Xét dấu biểu thức $f(x) = (-x + 1)(x + 3)(2x - 4)$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $-x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, hệ số $a = -1 < 0$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$, hệ số $a = 1 > 0$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, hệ số $a = 2 > 0$.

+ Bảng xét dấu. HD: {Xét tích ba nhị thức trên cùng bảng xét dấu}

x	$-\infty$	-3		1		2		$+\infty$
$-x + 1$		+		+	0	-		-
$x + 3$		-	0	+		+		+
$2x - 4$		-		-		-	0	+
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-

+Dựa vào bảng xét dấu $f(x)$ ta kết luận

$f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; -3) \cup (1; 2)$, $f(x) < 0$ khi $x \in (-3; 1) \cup (2; +\infty)$.

5. Giải bất phương trình nhờ vận dụng xét dấu.

Bài 5-1. Giải bất phương trình $(2x - 6)(1 - x) \geq 0$. **Giải.** Đặt $f(x) = (2x - 6)(1 - x)$, xét dấu $f(x)$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, hệ số $a = 2 > 0$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, hệ số $a = -1 < 0$.

+ Bảng xét dấu.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$2x - 6$		-		-	0	+	
$1 - x$		+	0	-		-	
$f(x)$		-	0	+	0	-	

+ Dựa và bảng xét dấu ta có kết luận tập nghiệm bất phương trình

$(2x - 6)(1 - x) \geq 0$ khi $x \in [1; 3]$. {hiểu x thuộc đoạn $[1; 3]$ hay $1 \leq x \leq 3$ }.

Bài 5-2. Giải bất phương trình $\frac{3x - 1}{x - 2} < 0$. **Giải.** Đặt $g(x) = \frac{3x - 1}{x - 2}$, xét dấu $g(x)$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$, hệ số $a = 3 > 0$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, hệ số $a = 1 > 0$.

+ Bảng xét dấu.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$3x - 1$		-	0	+		+	
$x - 2$		-		-	2	+	
$g(x)$		+	0	-		+	

+ Dựa và bảng xét dấu ta có kết luận tập nghiệm bất phương trình

$\frac{3x - 1}{x - 2} < 0$ khi $x \in \left(\frac{1}{3}; 2\right)$. {hiểu x thuộc khoảng $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$ hay $\frac{1}{3} < x < 2$ }

Bài 5-3. Giải bất phương trình $|x - 1| \leq 2|-x - 4| + x - 2$.

Giải. HD: {Dùng khử dấu giá trị tuyệt đối}

+ Tìm nghiệm nhị thức $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, hệ số $a = 1 > 0$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $-x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$, hệ số $a = -1 < 0$.

Bảng khử dấu giá trị tuyệt đối

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$ x - 1 $		$-x + 1$		$-x + 1$	0	$x - 1$	
$ -x - 4 $		$-x - 4$	0	$x + 4$		$x + 4$	

+ Dựa và bảng ta phân từng khoảng ra để khử giá trị tuyệt đối bất phương trình

$$|x - 1| \leq 2|-x - 4| + x - 2 \quad (*)$$

a) Khi $x \in (-\infty; -4]$ bất phương trình (*) trở thành

$$-x + 1 \leq 2(-x - 4) + x - 2 \Leftrightarrow 1 \leq -10,$$

do đó trên nửa khoảng $(-\infty; -4)$, bất phương trình vô nghiệm.

b) Khi $x \in (-4; 1]$ bất phương trình trở thành

$$-x + 1 \leq 2(x + 4) + x - 2 \Leftrightarrow 4x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{4}.$$

Vậy kết hợp trên nửa khoảng $(-4; 1]$, bất phương trình có nghiệm là $-\frac{5}{4} \leq x \leq 1$.

c) Khi $x \in (1; +\infty)$ bất phương trình trở thành

$$x - 1 \leq 2(x + 4) + x - 2 \Leftrightarrow 2x \geq -7 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}.$$

Vậy kết hợp trên khoảng $(1; +\infty)$, bất có nghiệm là $(1; +\infty)$.

Tổng hợp các kết quả trên a), b), c) ta được nghiệm của bất phương trình là $-\frac{5}{4} \leq x \leq +\infty$.

6. Giải các bất phương trình đưa về dạng tích, thương để xét dấu với vế phải là số 0.

Bài 6-1. Giải bất phương trình $\frac{2}{x-1} \geq 3$.

Giải. HD: {Đặt đk, chuyển về, rồi quy đồng đưa về thương }

+ Điều kiện: $x - 1 \neq 0$. Bất phương trình tương đương

$$\frac{2}{x-1} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - 3(x-1)}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - 3x + 4}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x + 6}{x-1} \geq 0. \text{ Đặt } g(x) = \frac{-3x + 6}{x-1}.$$

Ta xét dấu $g(x)$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $-3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, hệ số $a = -3 < 0$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, hệ số $a = 1 > 0$.

+ Bảng xét dấu. {Xét thương hai nhị thức trên cùng bảng xét dấu}

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$-3x + 6$			0	-
$x - 1$	-	0		+
$g(x)$	-		0	-

+ Dựa vào bảng xét dấu $g(x)$ ta kết luận

$$\{g(x) \geq 0 \text{ Khi } x \in (1; 2] \Leftrightarrow \frac{-3x + 6}{x-1} \geq 0 \text{ khi } x \in (1; 2] \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} \geq 3 \text{ khi } x \in (1; 2] \}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in (1; 2]$ hay $1 < x \leq 2$.

Bài 6-2. Giải bất phương trình $\frac{3}{2x-1} - \frac{1}{x+2} \leq 0$.

Giải. HD: {Đặt đk, rồi quy đồng đưa về thương }

+ Điều kiện: $2x - 1 \neq 0$ và $x + 2 \neq 0$. Bất phương trình tương đương

$$\frac{3(x+2) - 1(2x-1)}{(2x-1)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x+6-2x+1}{(2x-1)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+7}{(2x-1)(x+2)} \leq 0. \text{ Đặt } h(x) = \frac{x+7}{(2x-1)(x+2)}.$$

Ta xét dấu $h(x)$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -7$, hệ số $a = 1 > 0$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, hệ số $a = 2 > 0$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$, hệ số $a = 1 > 0$.

+ Bảng xét dấu. {Xét tích, thương ba nhị thức trên cùng bảng xét dấu}

x	$-\infty$	-7	-2		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x+7$		$-$	0	$+$	$ $	$+$
$2x-1$		$-$	$ $	$-$	$ $	$+$
$x+2$		$-$	$ $	$-$	0	$+$
$h(x)$		$-$	0	$+$	$ $	$+$

+Dựa vào bảng xét dấu $h(x)$ ta kết luận

$$\{h(x) \leq 0 \text{ khi } x \in (-\infty; -7] \cup (-2; \frac{1}{2})\} \Leftrightarrow \frac{3}{2x-1} - \frac{1}{x+2} \leq 0 \text{ khi } x \in (-\infty; -7] \cup (-2; \frac{1}{2})\}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in (-\infty; -7] \cup (-2; \frac{1}{2})$.

Bài 6-3. Giải bất phương trình $\frac{x^2 + x - 3}{x^2 - 4} \geq 1$

Giải. HD: {Đặt đk, chuyển về, rồi quy đồng đưa về tích, thương }

+ Điều kiện: $x^2 - 4 \neq 0$. Bất phương trình tương đương

$$\frac{x^2 + x - 3}{x^2 - 4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 3 - (x^2 - 4)}{x^2 - 4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x + 1}{x^2 - 4} \geq 0. \text{ Đặt } A(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4} = \frac{x + 1}{(x - 2)(x + 2)}$$

Ta xét dấu $A(x)$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$, hệ số $a = 1 > 0$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, hệ số $a = 1 > 0$.

+ Tìm nghiệm nhị thức $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$, hệ số $a = 1 > 0$.

+ Bảng xét dấu. {Xét tích, thương ba nhị thức trên cùng bảng xét dấu}

x	$-\infty$	-2	-1		2	$+\infty$
$x+1$		$-$	$ $	$+$	0	$+$
$x-2$		$-$	0	$-$	$ $	$+$
$x+2$		$-$	$ $	$-$	$ $	$+$
$A(x)$		$-$	$ $	$+$	0	$+$

+Dựa vào bảng xét dấu $A(x)$ ta kết luận

$$\{A(x) \geq 0 \text{ khi } x \in (-2; -1) \cup (2; +\infty)\} \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 3}{x^2 - 4} \geq 0 \text{ khi } x \in (-2; -1) \cup (2; +\infty)\}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in (-2; -1) \cup (2; +\infty)$.

Bài 6-4. Giải bất phương trình $|3 - 4x| \leq 11$ (*)

Giải. HD: {Bình phương hai vế, đưa về tích hai nhị thức, rồi xét dấu hoặc khử giá trị tuyệt đối }

$$\text{Ta có } |3 - 4x| = \begin{cases} 3 - 4x & \text{với } 3 - 4x \geq 0 \text{ hay } x \leq \frac{3}{4} \\ -(3 - 4x) & \text{với } 3 - 4x < 0 \text{ hay } x > \frac{3}{4} \end{cases}$$

a) Khi $x \leq \frac{3}{4}$, bất phương trình (*) trở thành { Khi $x \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x \in (-\infty; \frac{3}{4}]$ }

$$3 - 4x \leq 11 \Leftrightarrow 4x \geq -8 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

Vậy trong nửa không $(-\infty; \frac{3}{4}]$, bất phương trình có nghiệm $x \in [-2; \frac{3}{4}]$.

b) Khi $x > \frac{3}{4}$, bất phương trình (*) trở thành

$$-(3 - 4x) \leq 11 \Leftrightarrow -3 + 4x - 11 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{14}{4}.$$

Vậy trong khoảng $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$, bất phương trình có nghiệm $x \in \left(\frac{3}{4}; \frac{7}{2}\right]$.

Tổng hợp các kết quả ta được nghiệm của bất phương trình là $\left[-2; \frac{7}{2}\right]$.

—oo00oo—

BÀI 5. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

1. Định lí về dấu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

- Nếu $\Delta < 0$ ta có $f(x)$ cùng dấu với a khi $x \in R = (-\infty; +\infty)$.
- Nếu $\Delta = 0$ ta có $f(x)$ cùng dấu với a khi $x \in R \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\} = \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.
- Nếu $\Delta > 0$ ta có
 $f(x)$ cùng dấu với a khi $x \in (-\infty; x_1)$ hoặc $x \in (x_2; +\infty)$ với $x_1 < x_2$.
 $f(x)$ trái dấu với a khi $x \in (x_1; x_2)$.

Chú ý: - Biệt hiệu $\Delta = b^2 - 4ac$, có thể dùng MTBT để suy ra dấu Δ .

- Khi $\Delta = 0$ thì tam thức có nghiệm kép $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Khi $\Delta > 0$ thì tam thức có 2 nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).
- Khi $a > 0$ thì dấu của a là +, khi $a < 0$ thì dấu của a là -.

2. Ví dụ để hiểu rõ lí thuyết.

Ví dụ 1. Xét dấu tam thức bậc nhất $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$. {Dùng MTBT suy ra dấu Δ và nghiệm}
 + Tam thức vô nghiệm, ta có $\Delta < 0$, hệ số $a = 2 > 0$. {a dương hay a có dấu là +}

+ Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

Kết luận: $2x^2 + 3x + 5 > 0$ với mọi $x \in (-\infty; +\infty)$ hay $\forall x \in R$.

Ví dụ 2. Xét dấu tam thức bậc nhất $g(x) = -x^2 + 5x - 3$. {Dùng MTBT suy ra dấu Δ và nghiệm, tìm dấu hệ số a }

+ Tam thức vô nghiệm, ta có $\Delta < 0$, hệ số $a = -1 < 0$. {a âm hay a có dấu là -}

+ Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	-	

Kết luận: $-x^2 + 5x - 3 < 0$ với mọi $x \in (-\infty; +\infty)$ hay $\forall x \in R$.

Ví dụ 3. Xét dấu tam thức bậc nhất $g(x) = x^2 + 2x + 1$. {Dùng MTBT suy ra dấu Δ và nghiệm, tìm dấu hệ số a }

+ Tam thức có nghiệm kép $x_0 = -1$, ta có $\Delta = 0$, hệ số $a = 1 > 0$. {a dương hay a có dấu là +}

+ Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	+

Kết luận: $x^2 + 2x + 1 > 0$ với mọi $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Hay kết luận: $x^2 + 2x + 1 \geq 0$ với mọi $x \in (-\infty; +\infty)$, $x^2 + 2x + 1 = 0$ khi $x = -1$.

Ví dụ 4. Xét dấu tam thức bậc nhất $g(x) = -3x^2 + 12x - 12$. {Dùng MTBT suy ra dấu Δ và nghiệm, tìm dấu hệ số a }

+ Tam thức có nghiệm kép $x_0 = 2$, ta có $\Delta = 0$, hệ số $a = -3 < 0$. { a âm hay a có dấu là -}

+ Bảng xét dấu

+

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g(x)$		$-$ 0 $-$	

. **Kết luận:** $-3x^2 + 12x - 12 < 0$ với mọi $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Hay kết luận: $-3x^2 + 12x - 12 \leq 0$ với mọi $x \in (-\infty; +\infty)$, $-3x^2 + 12x - 12 = 0$ khi $x = 2$.

Ví dụ 5. Xét dấu tam thức bậc nhất $f(x) = x^2 - 5x + 6$. {Dùng MTBT suy ra dấu Δ và nghiệm, tìm dấu hệ số a }

+ Tam thức có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = 2, x_2 = 3$, ta có $\Delta > 0$, hệ số $a = 1 > 0$. { a dương hay a có dấu là +}

+ Bảng xét dấu {Trong hai nghiệm $f(x)$ trái dấu với a , ngoài 2 nghiệm $f(x)$ cùng dấu với a }

+

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$f(x)$		$+$ 0 $-$	0 $+$	

.

Kết luận: $f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; 2)$ hoặc $x \in (3; +\infty)$, $f(x) < 0$ khi $x \in (2; 3)$.

Ví dụ 6. Xét dấu tam thức bậc nhất $h(x) = -x^2 + x + 12$. {Dùng MTBT suy ra dấu Δ và nghiệm, tìm dấu hệ số a }

+ Tam thức có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = -3, x_2 = 4$, ta có $\Delta > 0$, hệ số $a = -1 < 0$. { a âm hay a có dấu là -}

+ Bảng xét dấu {Trong trái, ngoài cùng}

+

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$h(x)$		$-$ 0 $+$	0 $-$	

.

Kết luận: $h(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -3)$ hoặc $x \in (4; +\infty)$, $h(x) > 0$ khi $x \in (-3; 4)$.