Chương III. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

I. Định nghĩa và các phép toán về vectơ trong không gian

1. Định nghĩa:

Vectơ trong không gian là đoạn thẳng có hướng.

+ Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ với điểm đầu A, điểm cuối B.

+ Vectơ tự do được kí hiệu $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \cdots$ {xác định độ dài và hướng}

+ Một số định nghĩa tương tự như trong các định nhgĩa vectơ trong mặt phẳng lớp 10 như là:

- Giá của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ. { $\overrightarrow{AB}$ có giá là đường thẳng AB}.

- Độ dài của vectơ là khoảng cách từ điểm đầu đến điểm cuối (điểm gốc đến điểm ngọn). kí hiệu $|\overrightarrow{AB}| = AB$. {AB là độ dài đoạn AB}

- Hai vectơ cùng phương khi hai giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

- Hai vectơ cùng hướng khi chúng cùng phương và có cùng chiều của hướng mũi tên. { Chiều từ gốc đến ngọn}

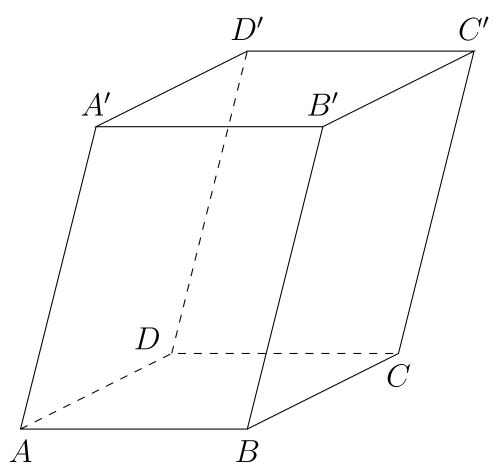
- Hai vectơ ngược hướng khi chúng cùng phương và có ngược chiều của hướng mũi tên. { Chiều từ gốc đến ngọn}

- Vectơ - không $\vec{0}$ là vectơ có điểm dầu và điểm cuối trùng nhau, do đó $\vec{0}$ có độ dài bằng 0 và cùng phương với mọi vectơ. { $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}$ }

- Hai vectơ bằng nhau khi chúng cùng hướng và cùng độ dài.

- $\cdots$

Ta minh hoạ với hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ sau đây.



Hình 1. 1

- ⋆ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$
- ⋆ $\overrightarrow{AB}$ đối với $\overrightarrow{C'D'}$
- ⋆ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$
- ⋆ $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ không cùng phương
- ⋆ $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{A'C}$ không cùng nằm trong mặt phẳng nào

2. Phép cộng và phép trừ vectơ trong không gian

+ Phép cộng và phép trừ hai vectơ trong không gian được định nghĩa tương tự như phép cộng và phép trừ trong mặt phẳng. {*lớp 10*}

+ Các tính chất và quy tắc trong mặt phẳng cũng được sử dụng như cho không gian.

+ Quy tắc cộng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

+ Quy tắc trừ: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

+ Quy tắc hình bình hành: Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. { AC là đường chéo }

+ Quy tắc hình hộp {cũng được áp dụng từ quy tắc hình bình hành}

Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hợp (theo hình 1.1) thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$. hay $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}$.

+ Các tính chất khác trong mặt phẳng cũng dùng được trong không gian

II. Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ

1. Khái niệm về sự đồng phẳng của ba vectơ trong không gian

Cho ba vectơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ đều khác $\overrightarrow{0}$ trong không gian. Từ một điểm O bất kỳ ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}, \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$. khi đó xảy ra hai trường hợp;

◦ Trường hợp các đường thẳng OA, OB, OC không cùng nằm trong một mặt phẳng, ta nói ba vectơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ không đồng phẳng.

◦ Trường hợp các đường thẳng OA, OB, OC cùng nằm trong một mặt phẳng, ta nói ba vectơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ đồng phẳng.

2. Định nghĩa:

Trong không gian, ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

3. Đều kiện để ba vectơ đồng phẳng

Trong hình học phẳng:

Ta có $\overrightarrow{a}$ cùng phương với $\overrightarrow{b}$ ($\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$), khi đó $\overrightarrow{a}$ biểu thi qua $\overrightarrow{b}$ là $\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{b}, k \in R$.

Ta có $\overrightarrow{c}$ phân tích theo hai vectơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ không cùng phương là $\overrightarrow{c} = h\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$ với $h, k \in R$.

Từ định nghĩa ba vectơ đồng phẳng trong không gian ta có thể chứng minh được định lí sau đây:

Định lí 1

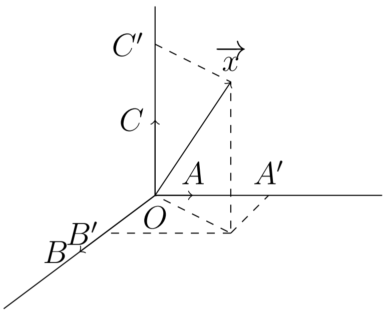
Trong không gian cho hai vectơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ không cùng phương và vectơ $\overrightarrow{c}$. Khi đó ba vectơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $\overrightarrow{c} = m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b}$. Ngoài ra cặp số m, n là duy nhất.

Hệ quả

Nếu $m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b} + p\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ và m, n, p không đồng thời bằng không thì ba vectơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ đồng phẳng.

Định lí 2

Trong không gian cho ba vectơ không đồng phẳng $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$. khi đó với mọi $\overrightarrow{x}$ ta đều tìm được bộ ba số m, n, p sao cho $\overrightarrow{x} = m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b} + p\overrightarrow{c}$. Ngoài ra bộ ba số m, n, p là duy nhất (Hình 1.2).



Hình 1. 2

$\star \overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}, m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA'}$

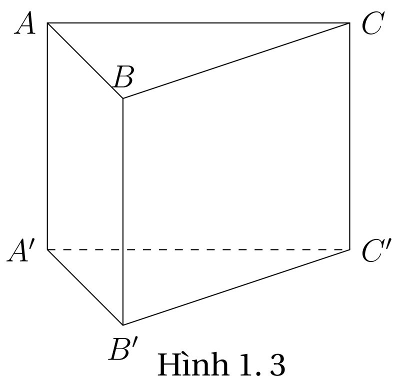
$\star \overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}, n\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB'}$

$\star \overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC}, p\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC'}$

$\star \overrightarrow{x} = m\overrightarrow{a} + n\overrightarrow{b} + p\overrightarrow{c}$

BÀI TẬP GIÚP HIỂU LÍ THUYẾT

- **Bài 1.** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Hãy kể tên các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ lần lượt bằng các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$.



Hình 1. 3

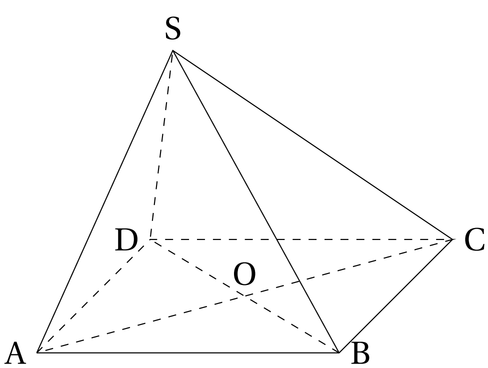
Giải.

+ Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. T/c các mặt bên là hình bình hành

+ Vectơ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

+ Vectơ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$.

- **Bài 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$.
Chứng minh rằng $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

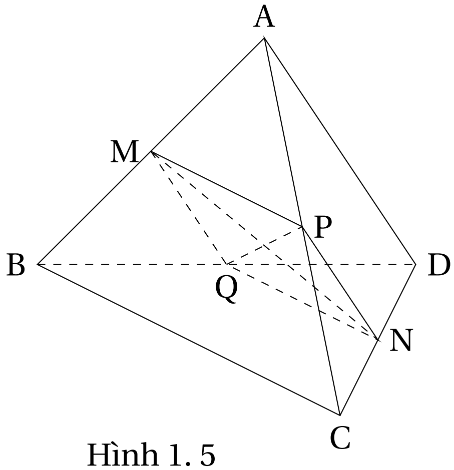


Hình 1. 4

Giải.

+ Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ (Hình 1.4).
Ta có $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$ (O là trung điểm AC). (1)
Và $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$ (O là trung điểm BD). (2)
Từ (1) & (2) ta suy ra $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$. (đpcm)

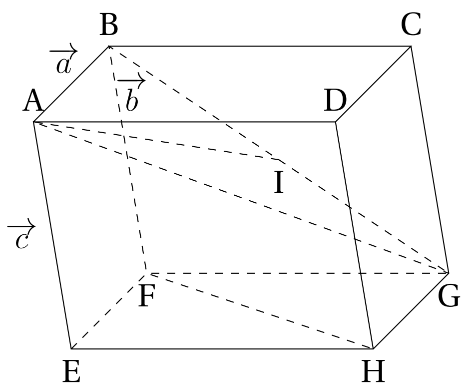
- **Bài 3.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.



Hình 1. 5

Giải.
Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AC và BD.
Ta có $MP//BC$ và $MP = \frac{1}{2}BC$ (Đường trung bình).
Ta có $QN//BC$ và $QN = \frac{1}{2}BC$ (Đường trung bình).
Vậy $MPNQ$ là hình bình hành.
$AD//PN$ (Đường trung bình) nên $AD//(MPNQ)$
$BC//MP$ (Đường trung bình) nên $BC//(MPNQ)$
Ta suy ra ba đường thẳng BC, MN, AD cùng song song với mp(α) nào đó song song với mp$(MPNQ)$.
Vậy ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

- **Bài 4.** Cho hình hộp $ABCD.EFGH$ có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{b}, \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{c}$. Gọi I là trung điểm của BG. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AI}$ qua ba vectơ $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ đồng phẳng.



Hình 1. 6

Giải.
Ta có $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG})$ (t/c trung điểm của I).
$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ (t/c hình hộp)
Vậy $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$
Vậy $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{c}$.
Hay bộ ba số $(m; n; p) = (1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

- **Bài 5.** Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$.

BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC