Chương III. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHƠNG GIAN

I. TOẠ ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ CỦA VECTƠ

1. Hệ toạ độ

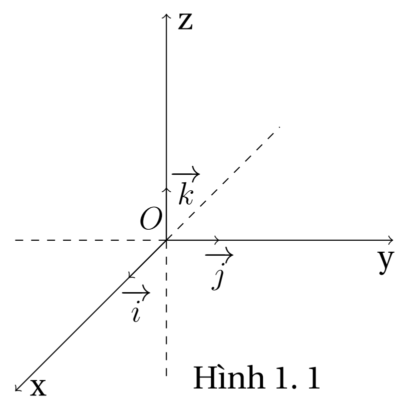
Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được gọi là hệ trục toạ độ vuông góc trong không gian.

Điểm O được gọi là gốc toạ độ.

Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ là các mặt phẳng toạ độ.

Nếu ta lấy ba vectơ đơn vị $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ lần lượt nằm trên Ox, Oy, Oz thì:

- $\overrightarrow{i}^2 = \overrightarrow{j}^2 = \overrightarrow{k}^2 = 1$
- $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{k} = \overrightarrow{k}.\overrightarrow{i} = 1.$



Hình 1. 1

2. Toạ độ của một điểm và của vectơ

Trong không gian toạ độ $Oxyz$:

+ Định nghĩa điểm $M(x;y;z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}.$

+ Định nghĩa vectơ $\overrightarrow{u} = (x;y;z) \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}.$

+ Từ định nghĩa vectơ ta suy ra $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{i} = 1\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j + 0k} = (1;0;0), \overrightarrow{j} = (0;1;0), \overrightarrow{k} = (0;0;1).$

+ Điểm $O(0;0;0)$, $\overrightarrow{OA} = (x_A; y_A; z_A) \Leftrightarrow A(x_A; y_A; z_A).$

II. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

1. Định lí

Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\overrightarrow{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3).$

2) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3).$

3) $k\overrightarrow{a} = k(a_1; a_2; a_3) = (ka_1; ka_2; ka_3)$. Với k là một số thực.

2. Hệ quả

+ Cho $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$

+ Vec tơ $\overrightarrow{0} = (0;0;0).$

+ Cho hai vectơ $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\overrightarrow{b} = (b_1; b_2; b_3).$

Ta có $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

+ Cho $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$.
Toạ độ trung điểm M của đoạn AB là $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}; \dfrac{y_A+y_B}{2}; \dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

+ Cho hai vectơ $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\overrightarrow{b} = (b_1; b_2; b_3) \neq \overrightarrow{0}$. $\overrightarrow{a}$ cùng phương với $\overrightarrow{b}$ khi và chỉ khi có một số k sao cho $\overrightarrow{a} = k\overrightarrow{b}$ hay $a_1 = kb_1, a_2 = kb_2, a_3 = kb_3$.

III. TÍCH VÔ HƯỚNG

1. Biểu thức toạ độ của tích vô hướng

Định lí. Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\overrightarrow{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức

$$\boxed{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

2. Ứng dụng

1) Độ dài của vectơ $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$ bằng $\boxed{|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ (vì $\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2$).

2) Trong không gian Oxyz, cho $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$. Khi đó khoảng cách giữa A và B chính là độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$.
Ta có thể dùng trực tiếp công thức sau:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

.

3) Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\overrightarrow{b} = (b_1; b_2; b_3)$ với $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ khác $\overrightarrow{0}$.
Nếu góc $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \varphi$ thì $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|}$.
Ta có thể dùng trực tiếp công thức sau: $\boxed{\cos\varphi = \cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = t}$
$\Longrightarrow \varphi = \cos^{-1}(t)$ (Dùng MTBT).

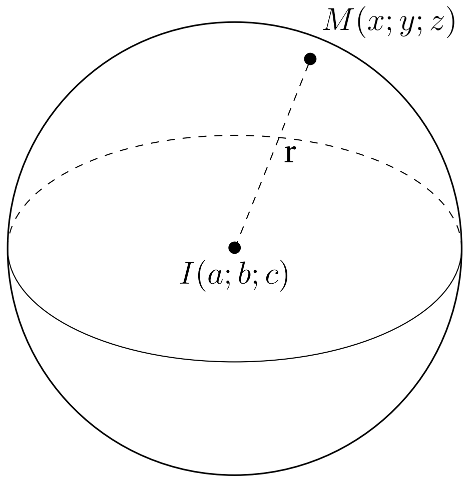
Nếu xét thấy $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ thì suy ra góc $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 1v = 90^\circ$.

VI. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Định lí

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính r có phương trình là:

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2}$$



.

Hình 1. 2

Nhận xét. Phương trình mặt cầu dạng khai triển

Ta có (S): $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$
$\Leftrightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2+z^2-2cz+c^2=r^2$
Hay (S) : $\boxed{x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0}$ (với $d=a^2+b^2+c^2-r^2$).

Nếu cho phương trình dạng $x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0 \quad (1)$ thì phương trình (1) là phương trình đường tròn khi $A^2+B^2+C^2-D>0$ và khi đó bán kính mặt cầu là $r=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$ và tâm mặt cầu là $I(-A;-B;-C)$.

BÀI TẬP GIÚP HIỂU LÍ THUYẾT

Các bài tập sau đây đều xét trong không gian $Oxyz$.

- **Bài 1.** Cho ba vectơ $\overrightarrow{a}=(1;3;5)$, $\overrightarrow{b}=(2;4;6)$, $\overrightarrow{c}=(-2;-5;7)$.

  a) Tính toạ độ của vectơ $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$.

  b) Tính toạ độ vectơ $\overrightarrow{y}=2\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$.

  c) Tính toạ độ vectơ $\overrightarrow{z}=\overrightarrow{a}-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}$.

  Giải.

  a) Ta có $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(1+2;3+4;5+6)=(3;7;11)$. {hoàng+hoành; tung+tung; cao+cao }

  b) Ta có $\overrightarrow{y}=2\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}=2(2;4;6)-(-2;-5;7)=(2.2-(-2);2.4-(-5);2.6-7)=(6;13;5)$.

  c) Ta có $\overrightarrow{z}=\overrightarrow{a}-\frac{1}{2}\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}=\left(1-\frac{1}{2}.2+3.(-2); 3-\frac{1}{2}.4+3(-5); 5-\frac{1}{2}.6+3.7\right)$
  $=(-6;-14;23)$.{Tính nhanh}

- **Bài 2.** Cho ba điểm $A(1;2;3), B(6;5;4)), C(7;-8;9)$.

a) Tìm toạ độ vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm toạ độ trung điểm M của đoạn AC.

c) Tìm khoảng cách đoạn BC.

Giải.

a) Ta có công thức $\overrightarrow{AB} = (6-1;\ 5-2;\ 4-3) = (5;3;1)$.
{ lấy toạ độ điểm ngọn B trừ cho toạ độ điểm gốc A, hoàng trừ hoàng; tung trừ tung; cao trừ cao}

b) Gọi $M(x_m;y_m;z_m)$ là trung điểm đoạn AC. Ta có công thức:
$\begin{cases} x_m = \dfrac{1+7}{2} \\ y_m = \dfrac{2+(-8)}{2} \\ z_m = \dfrac{3+9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_m = 4 \\ y_m = -3 \\ z_m = 6 \end{cases}$ Vậy $M(4;-3;6)$.

c) Công thức khoảng cách giữa hai điểm.

$BC = \sqrt{(7-6)^2+(-8-5)^2+(9-4)^2} = \sqrt{1^2+(-13)^2+5^2} = \sqrt{195}$.

- **Bài 3.** Cho hai vectơ $\overrightarrow{a} = (1;0;-2), \overrightarrow{b} = (2;3;-1)$ và điểm $M(2;5;2)$.

a) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$.

b) Tìm toạ độ điểm N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{a}$

c) Tính góc giữ hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$.

Giải.

a) Ta có biểu thức tích vô hướng $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 1.2 + 0.3 + (-2).(-1) = 4$.

b) Gọi $N(x_n;y_n;z_n) \Longrightarrow \overrightarrow{MN} = (x_n-2; y_n-25; z_n-2)$.

Nếu $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n - 2 = 1 \\ y_n - 5 = 0 \\ z_n - 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = 3 \\ y_n = 5 \\ z_n = 0 \end{cases}$. Vậy $N(3;5;0)$.

c) Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ Ta có: $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|}$. + Tích vô hướng $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 4$ theo câu a).
+ Độ dài vectơ $\overrightarrow{a}$ là $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{1^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$.
+ Độ dài vectơ $\overrightarrow{b}$ là $|\overrightarrow{b}| = \sqrt{2^2+3^2+(-1)^2} = \sqrt{14}$.

Vậy $\cos\varphi = \dfrac{4}{\sqrt{5}.\sqrt{14}} \Longrightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}.\sqrt{14}}\right) \simeq 68°15'57"$.

- **Bài 4.** Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu có phương trình sau đây:

a) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=1$;
b) $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=3$;
c) $x^2+y^2+z^2-8x+6y+2z+1=0$;
d) $x^2+y^2+z^2+x-3y-3=0$;

Giải.

a) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=1 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-(-2))^2+(z-1)^2=1^2$
$\Longrightarrow$ Tâm $I(3;-2;1)$, bán kính $r=1$.

b) $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=3 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-0)^2+(z-(-1))^2=(\sqrt{3})^2$.
$\Longrightarrow$ Tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $r=\sqrt{3}$.

c) $x^2+y^2+z^2-8x+6y+2z+1=0 \Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2+6y+9+z^2+2z+1=16+9 \Leftrightarrow$
$(x-4)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=5^2$;
$\Longrightarrow$ Tâm $I(4;-3;-1)$, bán kính $r=5$.

d) Mặt cầu $x^2+y^2+z^2+x-3y-3=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2.\dfrac{-1}{2}x-2.\dfrac{3}{2}y-2.0z-3=0$
$\Longrightarrow$ Tâm $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2};0\right)$, bán kính $r=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+0^2-(-3)}=\sqrt{\dfrac{22}{4}}=\dfrac{\sqrt{22}}{2}$.

- **Bài 5.** Lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau đây:

a) Có tâm $I(1;2;3)$ và có bán kính $r=3$.

b) Đi qua điểm $M(2;-3;1)$ và có tâm E(2; -1;1).

c) Có đường kính AB với $A(2;-1;4)$, $B(4;3;0)$.

Giải.

a) Phương trình mặt cầu có tâm và bán kính là:

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$.

b) Phương trình mặt cầu tâm E và bán kính $r=EM=\sqrt{4}=2$.

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=4$.

c) Tâm I mặt cầu là trung điểm AB có toạ độ $(3;1;2)$, bán kính là $r=\dfrac{AB}{2}=3$.

$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$.